

Zárójelentés a T046646 számú tematikus OTKA pályázat keretében végzett munkáról

Pályázat címe: Nemlineáris peremérték-feladatok numerikus vizsgálata és kvalitatív leírása

Témavezető: Dr. Domokos Gábor

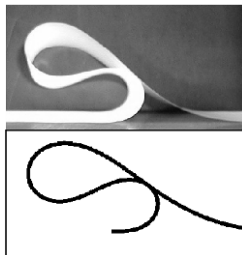
Résztvevők: Dr. Károlyi György
Dr Sipos András Árpád
Dr Várkonyi Péter

A pályázat címe egy átfogó, igen széles területet jelöl meg, ezen belül a kutatási tervben illetve a kutatási szerződésben rögzített részterületeken értünk el eredményeket.

A zárójelentésben a kutatási szerződés által kitűzött célokat idézzük pontosan, ezután összefoglaljuk röviden az odatartozó eredményeket és felsoroljuk a *jelentősebb publikációkat*.

1. A „felemelkedő” kihajlás vizsgálata. Ez a jelenség a gravitációval (önsúllyal) terhelt hosszú, talajon vagy merev lapon fekvő rugalmas szerkezetek (pl. sín, csővezeték) esetében jelentkezik. Cél a kezdeti felemelkedést követő posztkritikus viselkedés leírása. Határidő: 2004. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

W.B. Fraser-rel közösen felállítottuk a felemelkedő kihajlás matematikai modelljét. A legnagyobb nehézséget a megfelelő számú peremfeltétel előírása jelenti: a differenciálegyenlethez látszólag túl sok szabad peremfeltétel tartozik. Egy nem-triviális integrált találtunk, ezután a peremfeltételek már megfogalmazhatóak voltak és a feladatot részben analitikusan, részben numerikusan meg tudtuk oldani. A megoldásnál figyelembe vettük a teljes geometriai nemlinearitást és a rugalmas szál pontszerű érintkezését önmagával. Az érintkezés miatt a peremérték-feladat megoldását több, külön-külön sima feladat megoldásából állítottuk össze. A numerikus eredményeket egyszerű kísérletekkel is összevetettük. A felemelkedő kihajlás a mérnöki gyakorlatban elsősorban vasúti sínek és óceán-fenéken húzódó kábeleknél fordul elő.

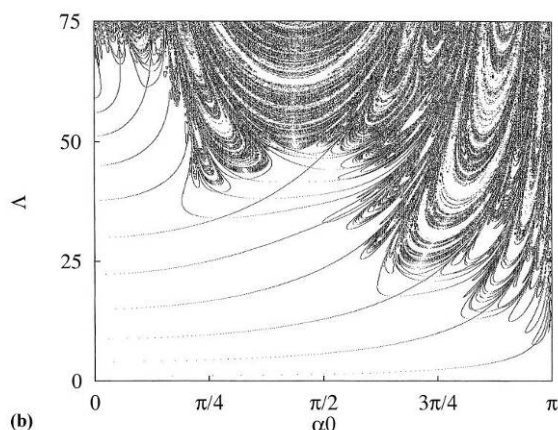


1. ábra: A vízszintes síkról felemelkedő rugalmas szalag a másodlagos kihajlás után: kísérlet és numerikus szimuláció

G. Domokos, W.B. Fraser, I. Szeberényi: **Symmetry-breaking bifurcations of the uplifted elastic strip**, Physica D Vol 185/2 pp 67-77, 2003

2. Komplex bifurkációs diagramok szerkezetének feltárása véletlen folyamatokon alapuló modellekkel. Cél, hogy a nagy számítás-igényű peremérték feladat megoldása nélkül nyerhessünk kvalitatív képet a bifurkációs diagram szerkezetéről. Határidő: 2004. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

Térbeli komplexitást mutató rendszereket már több mint két évtizede vizsgálnak. Bár matematikailag lényegesen egyszerűbb a kezdetiérték-feladatokban fellépő komplexitás vizsgálata, a fizikai valósághoz közelebb állnak az egyparaméteres (p) peremérték-feladatokat használó modellek. Ilyen modellekben a feladat leírásának alapvető eszköze a bifurkációs diagram. Munkánkban egyik célja az volt, hogy térbeli komplexitást mutató rendszereknél megállapítsuk a bifurkációs diagramra jellemző sajátosságokat. Mivel a megoldások száma p függvényében általában exponenciálisan növekedik, a bifurkációs diagram numerikus meghatározása komoly nehézséget jelent. Munkánkban arra mutattunk rá, hogy alkalmasan választott véletlen folyamatok segítségével viszonylag kevés számítási munkával igen pontos kvalitatív képet kaphatunk a bifurkációs diagram szerkezetéről. A diagram egyes ágait invariánsok segítségével azonosítottuk és az invariáns mennyiségek eloszlását összevetve a determinisztikus (pontos) és sztochasztikus számítás szerint jó egyezést kaptunk.

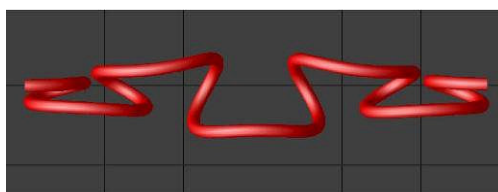


2. ábra: Térbeli komplexitást mutató feladathoz tartozó bifurkációs diagram

Gy. Károlyi, E. Kapsza, S. Kovács, G. Domokos: **Regular and random patterns in complex bifurcation diagrams**, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B Vol 3 No.4 pp 519-540, 2003

3. Növényi indák mechanikai modellezése. Már Darwin lerajzolta a növényi kacsokon megfigyelhető sajátos geometriát: eltérő orientációjú spirálok váltogatják egymást. Kezdetiérték-feladat alapú modellekkel arizonai kutatóknak sikerült megmagyarázni egy váltás keletkezését. Célunk, hogy peremérték-feladatként modellezve az indákat a természetben megfigyelhető sokszoros váltást is le tudjuk írni. Határidő: 2005. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

A feladat megoldásának alapvető nehézsége abból ered, hogy az indák modellje egy feszültség-mentes állapotban körív alakú rúd. Ez a térbeli feladat nem integrálható, ezért nagy elmozdulások esetén mindenképpen numerikus módszereket kell alkalmazni. Munkánkban sikerült analitikusan meghatároznunk a két végén befogott, kezdetben körív alakú, axiális erővel terhelt rúd kritikus teherparamétereit. Megállapítottuk, hogy ezeknek két sorozata létezik: a negatív (nyomóerő) paraméterek az Euler feladatból ismert végtelen sorozata valamint egy másik, (véges) sorozat melynek elemei pozitív értéket is felvehetnek. Ezen utóbbi sorozat elemeihez tartozó kihajlási alakok vezetnek a feladat-kitűzésben megjelölt spirál-váltásokhoz. Bebizonyítottuk, hogy kellően hosszú rúd esetén a spirál-váltások tetszőleges sorozata előállítható. Számításainkat a BME-n kifejlesztett Párhuzamos Hibrid Algoritmussal (PHA) végeztük, az eredményeket egyszerű kísérletekkel szemléltettük.



3. ábra: Növényi indát modellező, kezdeti görbülettel rendelkező rúd, öt egymást követő spirál-váltást mutató térbeli megoldása

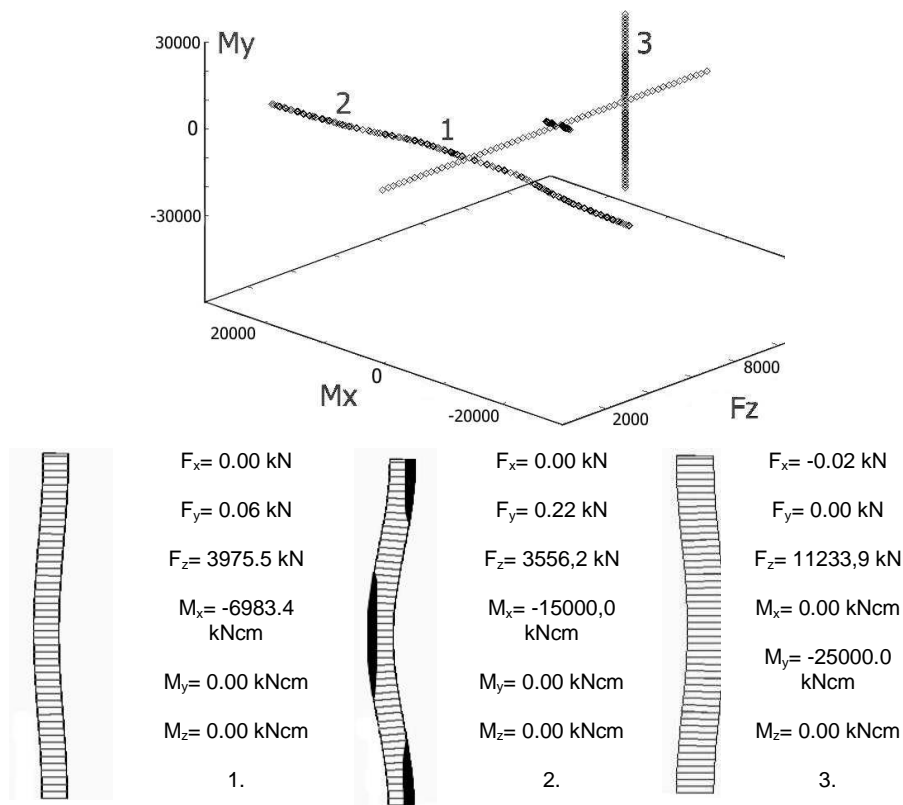
G. Domokos, T.J.Healey: **Multiple helical perversions of finite, intristically curved rods**, Int.J. Bifurcation and Chaos Vol 15., No.3 , pp 871-890, 2005

4. Szerkezetek optimális alakja és szimmetria-tulajdonságai közötti összefüggés vizsgálata. Célunk, hogy a katasztrófa-elmélet által leírt elemi bifurkációk általánosításával átfogó magyarázatot adjunk az egyparaméteres szerkezetcsaládok optimális konfigurációi és szimmetria-tulajdonságai között mutatkozó kapcsolatra. Határidő: 2005. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

Miután megkezdtuk ennek a feladatnak a vizsgálatát, hamarosan kiderült, hogy időben és munkamennyiségben meghaladja jelen OTKA téma kereteit, ugyanis a jelenség csak részben kapcsolódik a nemlineáris peremérték-feladatokhoz. Úgy döntöttünk, hogy a feladatot kettéválasztjuk, a nemlineáris

peremérték-feladatokhoz kapcsolódó részét jelen kutatás keretében vizsgáljuk, a további, tágabb kérdéscsoportra pedig, mely a matematika és a szerkezeti mechanika más területeire vezet, ettől függetlenül kérünk OTKA támogatást.

A feladat jelen kutatáshoz kapcsolódó része az elméleti (jórészt csoportelméleti) eszközökkel nyert eredmények mérnöki alkalmazása. Ezen eredmények azt jósolták, hogy léteznek olyan szimmetrikus geometriájú és szimmetrikus terhelésű szerkezetek, melyeknél a geometria kismértékű megzavarása a teherbírás növekedéséhez vezethet. Jelen kutatás keretei között a nemlineáris peremérték-feladatokkal leírható szerkezeteket vizsgáltuk, és sikerült mérnöki szempontból is meggyőző példát találnunk: egy téglalap keresztmetszetű, nyomott vasbeton oszlopot melynél (a téglalap oldalarányai függvényében) a vasalás aszimmetriája többlet-teherbírást eredményezett.



4. ábra: Vasbeton rúd térbeli kihajlása a berepedt zónák bemutatásával.

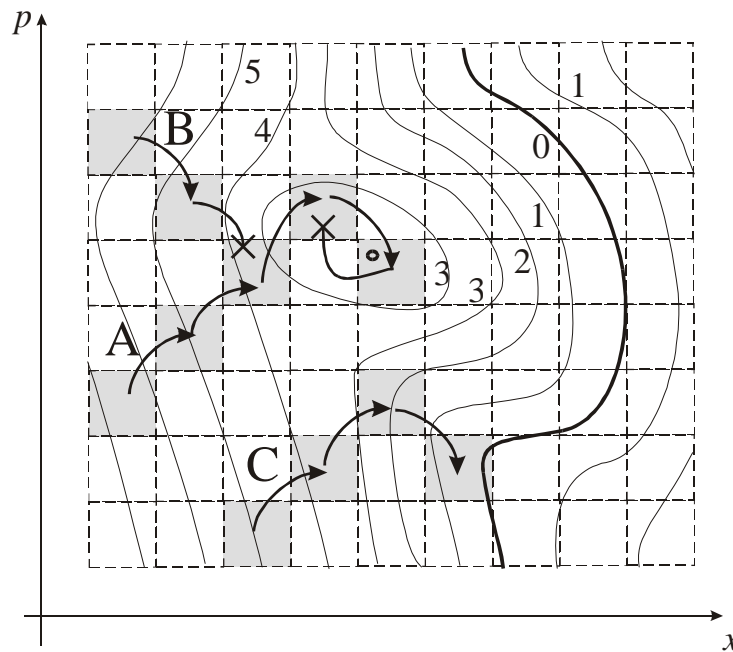
A. A. Sipos, G. Domokos: **Spatial deformations of RC members**, Vasbetonépítés, Vol 7, pp64-69, 2006.

5. Rugalmas, berepedt vasbeton szerkezetek deformációinak számítása. Célunk egy olyan algoritmus és azon alapuló program előállítása, melynek segítségével könnyen és pontosan számíthatóak a berepedt, rugalmas vasbeton tartók elmozdulásai általános (ferdén külpontos) terhelés esetén. Határidő: 2006. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

Ferdén külpontosan nyomott vasbeton elemeknél rugalmas állapotban a berepedt zóna meghatározása önmagában is nehéz feladat. Munkánk során először erre a kérdésre adtunk választ az egyenes külpontosság esetén korábban már alkalmazott, úgynevezett Pelikán-iteráció általánosításával a kétváltozós esetre. A kapott kétdimenziós, nemlineáris leképezésről sikerült bebizonyítanunk, hogy egyetlen, szuper-stabil fixponttal rendelkezik. Az egyváltozós esetben beláttuk a módszer globális konvergenciáját, ugyanezt a kétváltozós esetben numerikusan sikerült igazolnunk.

A kifejlesztett eljárást beépítettük egy térbeli rudakat kezdetiérték-feladatként meghatározó algoritmusba, ezen utóbbit pedig beágyaztuk a BME-n korábban kifejlesztett Párhuzamos Hibrid Algoritmusba (PHA) mely nemlineáris peremérték-feladatok numerikus megoldására szolgál. További célunk volt, hogy a PHA

algoritmust tovább gyorsítsuk, ennek céljából kifejlesztettük a Gradiens Hibrid Algoritmust (GHA). Utóbbi lényege, hogy a PHA által kiszámolt (és a legnagyobb számítási kapacitást igénylő) n darab függvényből súlyszámokkal egyetlen skalár U függvényt képez és az U függvény gradiensét követve közelíti meg a megoldásokat.



5. ábra: a GHA módszer illusztrációja két dimenzióban (1 változó és 1 paraméter) esetén. A számozott vonalak az U függvény szintvonalai. Vastag vonal jelöli a keresett egyensúlyi utat, vastagon szedett kör az U lokális minimum pontját. A négyzetháló a GRS felosztásakor létrejött négyzeteket jelöli, a nyilak az algoritmus által megvizsgált négyzeteket kötik össze. A: az algoritmus lokális minimumpontba fut. B: az algoritmus korábban vizsgált négyzethez ér. C: az algoritmus megoldást talál, útkövetéssel folytatódik.

Sipos A., Domokos G., Gáspár Zs.: **A kétdimenziós Pelikán-iteráció konvergencia-tulajdonságai**, Építés- építészettudomány 33 (1-2) pp 205-217 (2005), 2005

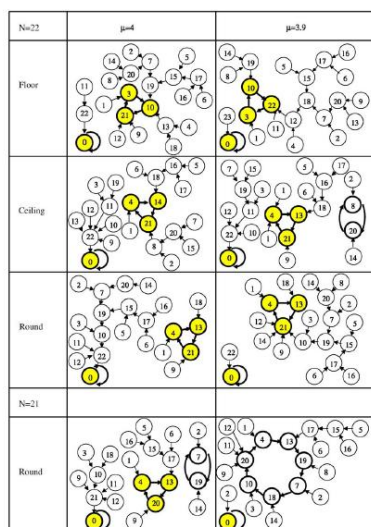
Várkonyi, P.L., Sipos A.Á., Domokos G.: **Szerkezet-tervezés az interneten: egy gépi algoritmus gyorsítási lehetőségei**, Építés-Építészettudomány Vol 34 (3-4) pp 271-291 (2006), 2006

6. Diszkrét és folytonos modellek közötti kapcsolat vizsgálata. Célunk, hogy korábban megkezdett kutatásokat folytatva példákkal illusztráljuk a diszkrét-> folytonos határátmenettel kapcsolatos elméleti nehézségeket és ezeket gyakorlati példákon is illusztráljuk. Olyan példákat keresünk, melyeknél az elemszám növelésével a diszkrétmodell nem konvergál a folytonoshoz. Határidő: 2007. Várható eredmény: publikáció nemzetközi folyóiratban.

A diszkrét és folytonos feladatok közötti átmenet nehézségeit egyrészt a dinamikai rendszerek numerikus vizsgálatával kapcsolatban vizsgáltuk: kaotikus leképezések számítása során a numerikus szimuláció a folytonos modellben nem létező periodikus pályákat mutat ki. Komoly matematikai erőfeszítések történtek annak érdekében, hogy a hamis periodikus pályák jelenléte dacára kvalitatív szempontból korrekt numerikus eljárások szülessenek. Ehhez a törekvéshez járul hozzá kis mértékben a kutatás keretében keletkezett dolgozat, mely a „durva szemcsés” („Coarse-grain”) megközelítés lehetőségeit és alkalmazhatóságát tárgyalja ilyen feladatokban.

A diszkrét-folytonos átmenet modellezési problémái élesen jelentkeznek populációk modellezésekor. Bár a folytonos modellek használata elterjedtebb, kaotikus dinamika esetén előfordulhat, hogy minőségileg helytelen előrejelzést adnak. A megfelelő modell kiválasztásakor tekintettel kell lenni az ökológiai rendszerekben állandóan jelenlévő zajra is. A zaj, a folytonos és a diszkrét rendszer kapcsolatát vizsgáltuk

és kimutattuk, hogy kis környezeti zaj esetén a diszkrét modellek használata indokolt. Kimutattuk, hogy egyes ciklusok érzéketlenek a külső zajra és a diszkrétizálásra; ezeket a ciklusokat robusztusnak neveztük.



6. ábra: Ciklusok a logisztikus modellben. A sárgával jelölt ciklusok robusztusan viselkednek, vagyis a paraméter és a diszkrétizálás változtatására nem érzékenyek.

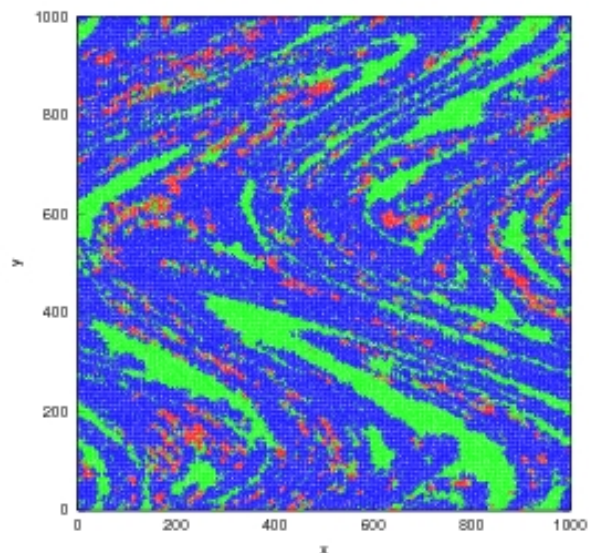
G. Domokos, I. Scheuring: **Discrete and continuous state population models in a noisy world**, J. Theoretical Biology, Vol 227, pp 535-545., 2004

Domokos G.: **Dialógus a kontinuumról**, Természet Világa, Vol 136, No. 12, Pp 538-542 (2005), 2005

G. Domokos: **Coarse-grained observation of discretized maps**, Int.J. Bifurcation and Chaos Vol 15., No.3 , pp 861-870, 2005

7. Periodikus határfeltételekkel ellátott, zárt áramlásban kaotikusan sodródó populációk vizsgálata. Korábbi mérési és szimulációs eredmények azt vizsgálták, hogy a ciklikus versenyhelyzetben levő fajok keveredés nélkül együtt élnek, jól kevert rendszerben csak egy marad életben. Meg kívánjuk mutatni, hogy a nemlineáris hatásokat figyelembe vevő, kaotikus keverés esetén mindkét viselkedés megfigyelhető.

Átfogó numerikus szimulációk segítségével sikerült kimutatnunk, hogy a ciklikus versenyhelyzetben levő fajok zárt tartályban zajló, folyadékáramlás hatására létrejövő kaotikus keveredés esetén képesek együtt élni. A folyadék mozgása a versengő populációkat szálas struktúrák mentén rendezi. Ez a korábbi vizsgálatoknál feltételezett tökéletes keveredésnél gyengébb keveredéshez vezet, ami lehetővé teszi a versengő fajok együttélését. Ezen eredményeket továbbgondolva kidolgoztuk a zárt áramlásokban zajló kémiai vagy biológiai aktivitás új, a tradicionálistól jelentősen eltérő reakcióegyenleteit. Kiderült, hogy a zárt, kaotikus folyadékáramlásokban zajló kémiai reakciók egyenletei csatolódnak a szálasságot jellemző effektív, időfüggő fraktáldimenzió változását leíró egyenlethez. Az eredmények egyfajta általánosítását adták a korábban nyitott áramlásokra levezetett eredményünknek, ahol a fraktáldimenzió időben állandó volt. Az ezen a kutatási területen elért eredmények alapján egy nagyobb lélegzetű összefoglaló (review) cikket közöltünk.



7. ábra: Ciklikus versenyhelyzetben levő fajok versengése folyadékáramlásban. Az egyes színek a négyzet alakú tartályban együtt élő három fajt jelölik a numerikus szimuláció eredményéről készült pillanatfelvételen.

György Károlyi, Zoltán Neufeld, István Scheuring: **Rock-scissors-paper game in a chaotic flow: The effect of dispersion on the cyclic competition of microorganisms.**, Journal of Theoretical Biology, 236 (2005) pp. 12-20., 2005

Tamás Tél, Alessandro de Moura, Celso Grebogi, György Károlyi: **Chemical and Biological Activity in Open Flows: A Dynamical System Approach.**, Physics Reports, 413 (2005) pp 91-196., 2005

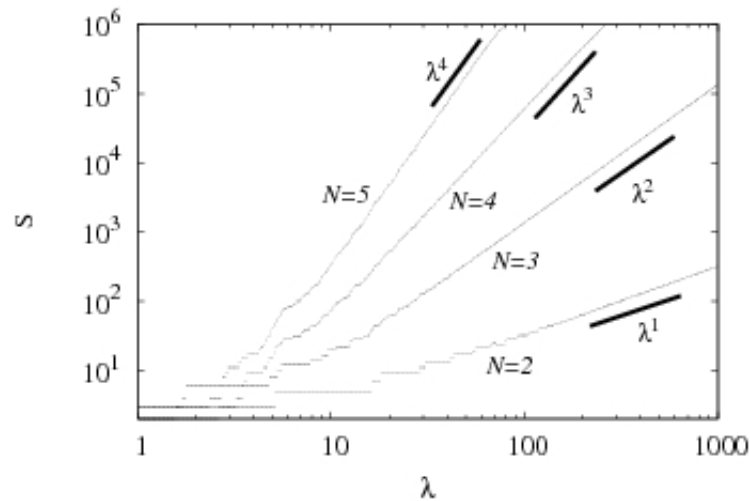
G. Károlyi, T.Tél: **Chemical transients in closed chaotic flows: The role of effective dimensions.**, Physical Review Letters 49 (2005) 85-98., 2006

G. Károlyi, T.Tél: **Effective dimensions and chemical reactions in fluid flows.**, Physical Review E 76 (2007) 046315/1-10., 2007

8. Térbeli komplexitást mutató rendszerek vizsgálata. Ezen belül, célunk fraktálok szerepének tisztázása szálas kolóniák növekedésében valamint többdimenziós térbeli káosz vizsgálata.

Kidolgoztuk a szálas, fonalas szerkezetű kolóniák (fonalas baktérium és gombatelepek) növekedésének fraktálanalízisen alapuló modelljét. A modell a kolónia sűrűsége helyett annak időben változó fraktáldimenziójával jellemzi a telep fejlettségét és tápanyagfelvételét. A modell valósághű növekedési karakterisztikára vezet, hű leírását adja a kezdeti exponenciális biomassza növekedésnek, majd a későbbi lassuló növekedési szakasznak.

A térbeli káosz vizsgálata kapcsán egyrészt megvizsgáltuk, hogy milyen hatása van a kihajlásra annak, ha a kihajló szerkezetet nemkonzervatív erők terhelik. Helyfüggő, nemkonzervatív teherrel terhelt rugalmas rúdláncokat vizsgáltunk. Megmutattuk, hogy a statikai kihajlásvizsgálat rokonítható egy többdimenziós leképezéssel, amely minden esetben konzervatív, területtartó volt. A posztkritikus viselkedés során megjelenő komplex kihajlási alakok rokoníthatók a többdimenziós leképezés periodikus pályáival, ez a térbeli káosz egy lehetséges új definíciójához vezetett. Eszerint a kihajlási feladatot akkor nevezzük kaotikusnak, ha a kihajlási alakok száma exponenciálisan függ a kihajlási feladat értelmezési tartományának méretétől. Az exponens rokonítható a megfelelő leképezés topológikus entrópiájával.



8. ábra: Az egyensúlyi helyzetek S számának változása a λ teher és a végein terhelt, N elemű rugalmas rúdlánc N hosszának függvényében. A megoldások száma $S=\lambda^{N-1}$, vagyis exponenciálisan függ a vizsgált tartomány N hosszától.

G. Károlyi: **Fractal scaling of microbial colonies affects growth.** Physical Review E 71 (2005) 031915/1-6., 2005

A. Kocsis, G. Károlyi: **Buckling under nonconservative load: conservative spatial chaos.** Periodica Polytechnica 49 (2005) 85-98., 2006

A. Kocsis, G. Károlyi: **Conservative spatial chaos of buckled elastic linkages.** Chaos 16 (2006) 033111/1-7., 2006

ÖSSZEFOGLALÁS

A fentiekben idéztük a kutatási szerződésben megfogalmazott összes kutatási célt és mindegyik után megadtuk az adott témában elért eredményeket, megjelöltük a legfontosabb publikációkat.